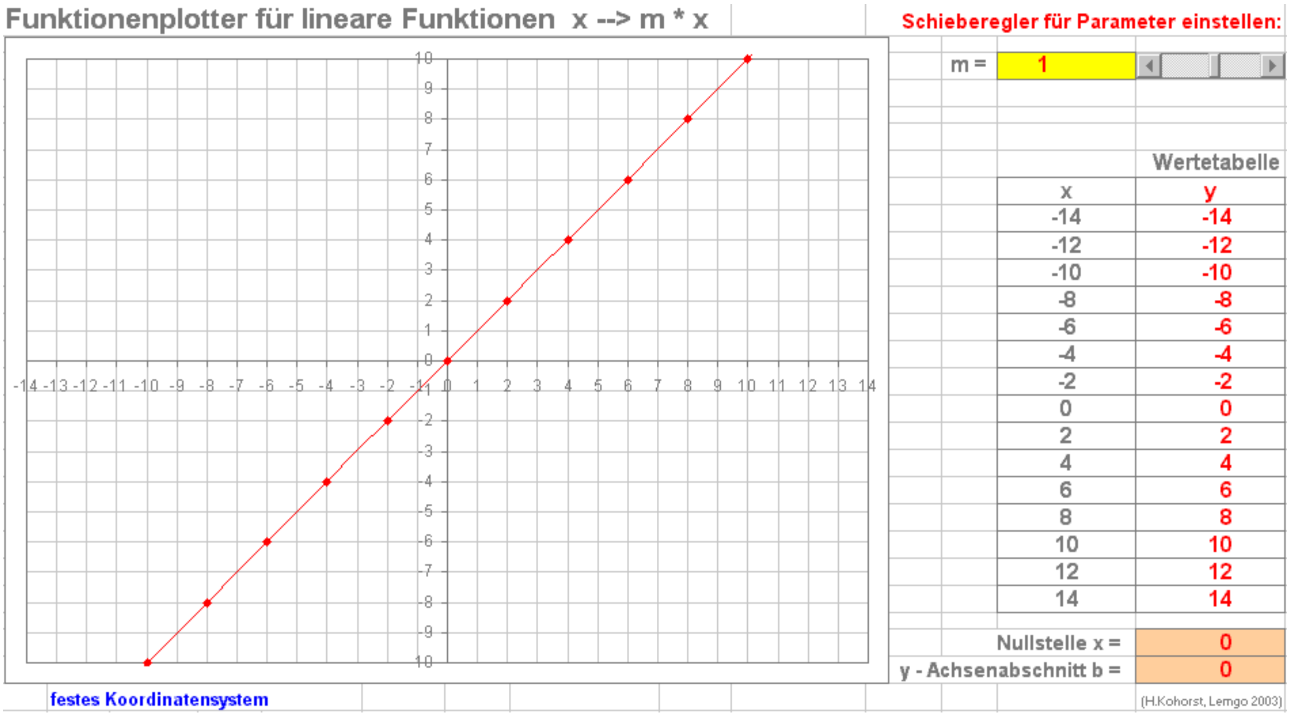
Arbeitsblatt 1

Vorbereitung:
Öffne die EXCEL-Tabelle „linfunk.xls“ und dort das erste Tabellenblatt mit dem Namen „mx fest“. Du siehst dort (vgl. Abb.1):

- Ein festes Koordinatensystem mit einer Geraden
- Einen „Schieberegler“, mit dem du m in $\frac{1}{10}$-Schritten variieren kannst
- Eine Wertetabelle für $-14 \leq x \leq 14$ und
- Angaben für die Schnittstellen der Geraden mit der x-Achse (= Nullstelle) und der y-Achse (= y-Achsenabschnitt)

Abb.1



x	y
-14	-14
-12	-12
-10	-10
-8	-8
-6	-6
-4	-4
-2	-2
0	0
2	2
4	4
6	6
8	8
10	10
12	12
14	14

Aufgaben:

1. Welche Funktionsvorschrift gehört zu der dargestellten Geraden? Beschreibe die Gerade! Wie verläuft sie? Achte auch auf die Wertetabelle!
2. Variiere mit dem Schieberegler den Wert für m ! Gehe dabei systematisch vor ! Welche Änderungen des Wertes von m haben welche Auswirkungen? Achte sowohl auf die Gerade als auch auf die Wertetabelle! Schreibe deine Beobachtungen möglichst systematisch auf ! Der beigefügte „Protokollbogen“ hilft dir dabei !

Hinweise / Leitfragen zur Bearbeitung von Aufg.2:

1. Gibt es Werte für m, so dass die Gerade auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse liegt ?
2. Unterscheide beim „systematischen“ Variieren die Fälle $m > 0$ und $m < 0$!
3. Gibt es Eigenschaften, die alle Geraden gemeinsam haben, egal, welchen Wert du für m einstellst?
4. Die ursprünglich eingestellte Gerade heißt „1. Winkelhalbierende“. Warum ? Welche Gerade könnte man analog als „2. Winkelhalbierende“ bezeichnen ? Welchen Wert hat das dazu gehörige m ?
5. Kannst du bei einer beliebigen Geraden allein am Graphen „ablesen“, welchen Wert m gerade hat ? Verwende zur Beantwortung dieser Frage auch das zweite Tabellenblatt mit dem Namen „mx Bruch fest“ !

Protokollbogen zum Arbeitsblatt 1

Fülle beim Bearbeiten der Aufgaben möglichst alle weißen Felder sinnvoll aus!

m	Gerade	Besonderheit / Beobachtung
m =	Die Gerade ist die ursprünglich dargestellte Gerade.	Diese Gerade heißt: … In der Wertetabelle sieht man: ...
m =	Die Gerade liegt auf der x-Achse	
m =	Die Gerade liegt auf der y-Achse	
m > 0	Je größer m wird, ...	Für x $\neq$ 0 ist der Quotient $\frac{y}{x}$
m < 0	Je kleiner m wird, ...	Für x $\neq$ 0 ist der Quotient $\frac{y}{x}$
m beliebig	Der Faktor m gibt an, ... Der Faktor m ist also ein Maß für ...	Aus der Klasse 7 weißt du: Für m > 0 heißt eine solche Zuordnung ...
m =	Man erhält diese Gerade, indem man die ursprünglich dargestellte Gerade ...	Diese Gerade heißt 2. Winkelhalbierende
m beliebig	Alle Geraden verlaufen durch denselben Punkt O(/) ; jede Gerade geht durch den Punkt A(1 /)	Für m $\neq$ 0 ist das rechtwinklige Dreieck OPA mit den Eckpunkten O(/) , P(/ 0) und A(1 /) ein „Steigungsdreieck“ der Geraden.
$m = \frac{p}{q}$ beliebig, p $\neq$ 0 , q $\neq$ 0	Der Punkt B(q / p) ...	Für das Dreieck OQB mit Q(q / 0) und B(q / p) gilt: ... Auch dieses Dreieck bezeichnet man als ... denn ...

Intendierte Lösungselemente zu Arbeitsblatt 1:

Zu Aufgabe 1:
Diese Aufgabe dient im Wesentlichen dazu, dass die Schüler(innen) sich in das Tabellenblatt „einlesen“ und erkennen:
Die Zuordnungsvorschrift ist x → m*x , eingestellt ist m = 1 , die Gerade gehört also zu der Zuordnung x → 1*x = x . Sie verläuft durch alle Punkte mit gleichen x- und y-Koordinaten.

Zu Aufgabe 2:
1. Für m = 0 liegt die Gerade auf der x-Achse. Es gibt aber kein m , so dass die Gerade auf der y-Achse liegt. Das würde auch der Funktionseigenschaft der Zuordnung widersprechen.
2. Lässt man – beginnend bei m = 0 – den Wert von m immer größer werden, so „steigt“ die Gerade immer stärker.
   Lässt man – beginnend bei m = 0 – den Wert von m immer kleiner werden, so „fällt“ die Gerade immer stärker. In diesem Fall spricht man in der Mathematik von „negativer Steigung“.
   Der Faktor m ist also ein Maß für die Steigung der Geraden.
3. Die ursprünglich eingestellte Gerade mit der Steigung m = 1 heißt *1. Winkelhalbierende*, weil sie den 90°-Winkel des Koordinatensystems im 1.Quadranten halbiert. Die *2. Winkelhalbierende* müsste entsprechend den 90°-Winkel des Koordinatensystems im 2.Quadranten halbieren. Sie verläuft durch alle Punkte, deren x- und y-Koordinaten zwar den gleichen Betrag, aber verschiedene Vorzeichen haben.
   Zu dieser Geraden gehört die Steigung m = –1.
4. Alle Geraden gehen durch den Koordinatenursprung, das heißt die Nullstelle und der y-Achsenabschnitt ändern sich nicht.
5. Alle Geraden gehen durch den Punkt A(1 / m), denn m*1 = m. Mit Hilfe dieser Eigenschaft kann man an jeder Geraden ablesen, wie groß das zugehörige m gerade ist: m ist gleich der y-Koordinate des Geradenpunktes an der Stelle 1.
   Aus diesem Grunde nennt man das Dreieck OPA aus Ursprung O(0 / 0), P(1 / 0) und A(1 / m) ein ***Steigungsdreieck der Geraden***.

Vertiefung:

Ist m nicht ganzzahlig, so fällt das Ablesen im Koordinatensystem schwer bzw. ist nicht genau möglich. Es gilt aber (vergleiche das zweite Tabellenblatt mit dem Namen „mx Bruch fest“):

6. Ist $m = \frac{p}{q}$, so geht die Gerade durch den Punkt B(q / p), denn $\frac{p}{q} \cdot q = p$.
7. Das Dreieck OQB aus Ursprung O(0 / 0), Q(q / 0) und B(q / p) ist ebenfalls ein Steigungsdreieck der Geraden, denn wegen der Proportionalität gilt
   $\overline{BQ} : \overline{OQ} = \overline{AP} : \overline{OP} = m$.
8. Man kann also auch andere Punkte der Geraden nutzen, um m abzulesen, insbesondere solche mit ganzzahligen Koordinaten. Liegt etwa der Punkt R(u / v) auf der Geraden und sind u und v ganzzahlig, so ist $m = \frac{v}{u}$.

Dieser zentrale Sachverhalt sollte gemeinsam mit den Schüler(innen) anhand einer entsprechenden Zeichnung z.B. an der Tafel bzw. auf OHP-Folie erarbeitet und anschließend mit dem EXCEL-Tabellenblatt verifiziert werden.

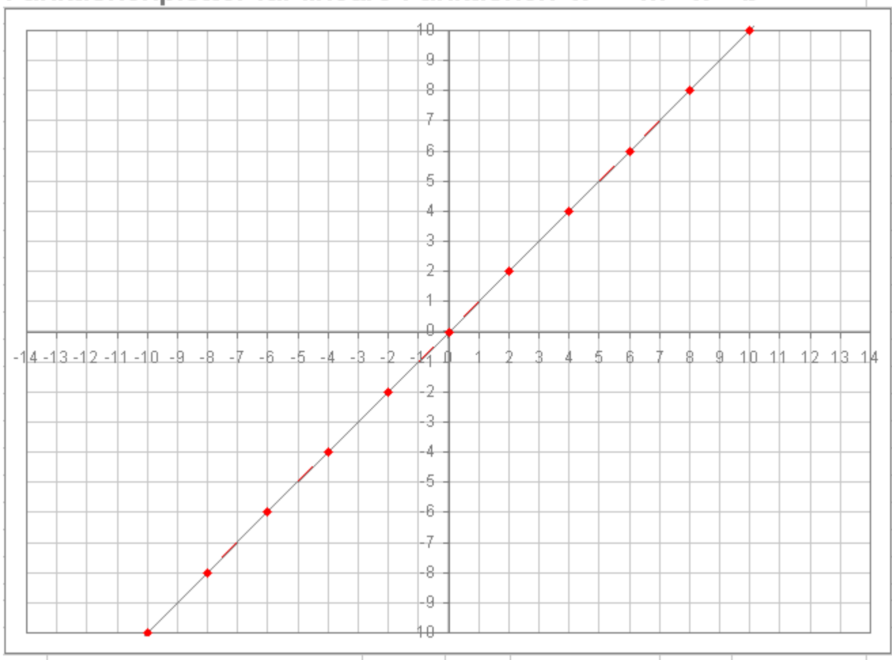
Arbeitsblatt 2

Vorbereitung:
Öffne die EXCEL-Tabelle „linfunk.xls“ und dort das dritte Tabellenblatt mit dem Namen „mx+b fest“. Du siehst dort (vgl. Abb.2):

- Ein festes Koordinatensystem mit einer Geraden
- 2 „Schieberegler“, mit denen du m und b in $\frac{1}{10}$-Schritten variieren kannst
- Eine Wertetabelle für $-14 \leq x \leq 14$ und
- Angaben für die Schnittstellen der Geraden mit der x-Achse (= Nullstelle) und der y-Achse (= y-Achsenabschnitt)

Abb.2

Funktionenplotter für lineare Funktionen x --> m * x + b



festes Koordinatensystem

Schieberegler für Parameter einstellen:

m =	1
b =	0

Wertetabelle

x	y
-14	-14
-12	-12
-10	-10
-8	-8
-6	-6
-4	-4
-2	-2
0	0
2	2
4	4
6	6
8	8
10	10
12	12
14	14

Nullstelle x =	0
y - Achsenabschnitt b =	0

(H.Kohorst, Lemgo 2003)

Aufgaben: (Der beigefügte „Protokollbogen“ hilft dir wieder bei der Lösung !)

1. Lasse zunächst m unverändert und variiere mit dem Schieberegler nur den Wert für b ! Welche Änderungen des Wertes von b haben welche Auswirkungen auf die Gerade und auf die Wertetabelle? Schreibe deine Beobachtungen möglichst systematisch auf!
2. Untersuche nun, welche Auswirkungen die Änderung beider Parameter m und b hat! Schreibe deine Beobachtungen wieder möglichst systematisch auf !
3. Überlege schließlich, wie du eine Gerade zu $x \rightarrow m*x+b$ leicht selber zeichnen kannst bzw. wie du bei einer vorgelegten Geraden die Parameter m und b leicht „ablesen“ bzw. ermitteln kannst! Verwende bei Bedarf auch das vierte Tabellenblatt mit dem Namen „mx+b variabel“, bei dem du die Werte für m, b, Schrittweite und linke Grenze als Brüche mit bis zu dreistelligen Zählern und Nennern bzw. als Dezimalzahlen mit bis zu zwei Nachkommastellen frei eingeben kannst.

Hinweise / Leitfragen zur Bearbeitung der Aufgaben:

1. Achte bei den Aufgaben besonders darauf, wo jeweils die Koordinatenachsen geschnitten werden!
2. Gehe bei Aufg.2 systematisch vor, d.h.: a) Stelle m ein und variiere dann b !
   b) Stelle b ein und variiere dann m !
   (Solche Untersuchungen nennt man *„ceteris-paribus-Analysen“*)
   Was passiert jeweils mit den von den Geraden zu $x \rightarrow m*x$ (vgl. Arbeitsblatt 1) bekannten „Steigungsdreiecken“ ?

Protokollbogen zum Arbeitsblatt 2

Fülle beim Bearbeiten der Aufgaben möglichst alle weißen Felder sinnvoll aus!

m	b	Gerade	y-Achsenabschnitt	Nullstelle
m = 1	b variiert, b > 0	Die ursprünglich dargestellte Gerade wird		
m = 1	b variiert, b < 0	Die ursprünglich dargestellte Gerade wird		
m beliebig, aber fest	b variiert, $b \neq 0$	b bewirkt		
m variiert	$b \neq 0$ fest	m bewirkt		
m beliebig, $m \neq 0$	b beliebig, $b \neq 0$	Jede Gerade geht durch die drei Punkte S(0 /), A(1 /) und N(/ 0). Sowohl das Dreieck mit den Eckpunkten S, P(1 / b), A als auch das Dreieck mit den Eckpunkten O(0 / 0) , ... (/) und ... (/) sind „Steigungsdreiecke“ der Geraden.		
$m = \frac{p}{q}$ beliebig, $m \neq 0$	b beliebig, $b \neq 0$	Der Punkt B(q / b+p) ... Das Dreieck SQB mit S(0 / b), Q(q / b) und B(q / b+p) ist ...		

Man zeichnet die zu x → m*x+b gehörige Gerade, indem man

____

____

Man ermittelt für eine gezeichnet vorliegende Gerade die Parameter m und b, indem man

____

____

Intendierte Lösungselemente zu Arbeitsblatt 2:

Zu Aufgabe 1:
Durch eine Änderung von b wird die Gerade zu x → x um b Einheiten parallel verschoben, und zwar für b > 0 nach oben und für b < 0 nach unten. Entsprechend ändern sich der y-Achsenabschnitt und die Nullstelle:
Der neue y-Achsenabschnitt ist b und die neue Nullstelle ist –b , die Geraden gehen also durch die Punkte S(0 / b) und N(–b / 0). Ferner gehen sie durch den Punkt A(1 / b+1).

Zu Aufgabe 2:
a) Auch für jedes m $\neq$ 0 bewirkt b lediglich eine Parallelverschiebung der Geraden zu x → m*x nach oben (b > 0) bzw. nach unten (b < 0).
   Der neue y-Achsenabschnitt ist immer b , d.h. jede Gerade geht durch S(0 / b).
b) Lässt man b $\neq$ 0 unverändert und variiert nur m , so „dreht“ sich die Gerade um ihren Schnittpunkt S(0 / b) mit der y-Achse.

Für jede Variation mit m $\neq$ 0 und b $\neq$ 0 gilt:
Die Nullstelle ist $-\frac{b}{m}$, d.h. die Gerade geht durch N($-\frac{b}{m}$ / 0). Ferner geht die Gerade jeweils durch den Punkt A(1 / b+m). Ist schließlich $m=\frac{p}{q}$, so geht die Gerade durch den Punkt B(q / b+p), denn $\frac{p}{q}\cdot q+b=p+b$.
„Steigungsdreiecke“ sind nun zum Beispiel das Dreieck SPA mit P(1 / b) und das Dreieck SQB mit Q(q / b).

Zu Aufgabe 3:
1. **Zeichnen der zu x → m*x + b gehörigen Geraden:**
   Will man die zu x → m*x + b gehörige Gerade in einem Koordinatensystem zeichnen und ist m ganzzahlig, so markiert man – je nach „Eintragbarkeit“ – zwei der Punkte S(0 / b), A(1 / b+m) , N($-\frac{b}{m}$ / 0) und zeichnet die Verbindungsgerade.
   Ist dagegen $m=\frac{p}{q}$, so markiert man – je nach „Eintragbarkeit“ – zwei der Punkte S(0 / b), B(q / b+p) , N($-\frac{b}{m}$ / 0) und zeichnet die Verbindungsgerade.
2. **Ablesen der Funktionsvorschrift bei einer vorliegenden Geraden:**
   Hat man umgekehrt in einem Koordinatensystem eine Gerade mit y-Achsenabschnitt b und liegt der Punkt A(1 / y) auf der Geraden, so ist die Steigung m = y–b und die Zuordnungsvorschrift lautet x → m*x + b.
   Kann man beim Punkt A(1 / y) die y-Koordinate nicht genau ablesen und findet man stattdessen auf der Geraden einen Punkt B(q / b+p) mit ablesbaren Koordinaten, so ist die Steigung $m=\frac{p}{q}$.

Zusammenfassung:
Zu jeder linearen Funktion x → m*x + b gehört als Graph eine Gerade mit der ***Steigung m*** und dem ***y-Achsenabschnitt b*** . Jede Gerade ist durch ihre Steigung m und ihren y-Achsenabschnitt b eindeutig bestimmt.
Kennt man m und b , kann man die Gerade „leicht“ zeichnen.
Hat man die Gerade, kann man m und b „leicht“ ablesen bzw. ermitteln.